160 — Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie)

Soit E un espace vectoriel euclidien, muni du produit scalaire $(\cdot,\cdot)$.

I - Endomorphisme adjoint

1. Définition de l'adjoint

[Gr] p.238 **Déf. 1** : Soit $f \in End(E)$, il existe un unique endomorphisme f^* de E tq : $(f(x), y) = (x, f^*(y))$, $\forall x, y \in E$.
f^* est appelé adjoint de f.

[Go] p.269 **Ex** : $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $(M,N) = tr({}^tMN)$ $\quad \varphi_A : M \longrightarrow {}^tAMA$
alors $\varphi_A^* = \varphi_{{}^tA}$

[Gr] p.238 **Prop 2** : Si M est la matrice de f dans une base orthonormée, alors la matrice de f^* dans cette base est ${}^tM$.

[Gr] p.238 **Prop 3** :
- $* : End(E) \longrightarrow End(E)$, $f \longmapsto f^*$ est linéaire et involutive.
- $\forall f, g \in End(E)$, $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$ $\quad rg(f^*) = rg(f)$ $\quad det(f^*) = det(f)$
- $Ker(f)^\perp = Im(f^*)$ $\quad Im(f)^\perp = Ker(f^*)$

2. Adjoints remarquables

[Go] p.258 **Déf. 4** : $f \in End(E)$ est dit normal si f et f^* commutent.
$M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est normale si M et ${}^tM$ commutent.

Ex : les endomorphismes définis ci-dessous :

Déf. 5 : f est symétrique si $f^* = f$. On note $S(E)$ l'ensemble de tels f.
M est symétrique si ${}^tM = M$. On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble de telles M.
- f est antisymétrique si $f^* = -f$. On note $\mathcal{A}(E)$ l'ensemble correspondant.
M est antisymétrique si ${}^tM = -M$. On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble correspondant.
- Si $f \circ f^* = id = f \circ f^*$, f est orthogonal. On note $O(E)$ l'ensemble de tels f
de même $O_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,/\, {}^tMM = I_n = M{}^tM\}$ est l'ensemble des matrices orthogonales

Prop 6 : $S(E)$, $\mathcal{A}(E)$, $O(E)$ (et leurs analogues matriciels) sont des groupes.

Rmq : l'ensemble des matrices normales n'est pas un groupe.
$Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad A = S + Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
${}^tAA - A{}^tA = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \neq 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$

II - Endomorphismes normaux et réduction

1. Premières propriétés

Prop. 7 : $f \in End(E)$ est normal ssi $\forall x \in E$, $\|f(x)\| = \|f^*(x)\|$. [Go] p.258

Prop. 8 : $f \in End(E)$ normal, F sev f-stable. Alors $F^\perp$ est f^*-stable.

Application
Prop. 9 : $f \in End(E)$ normal. Soit E_λ un sous-espace propre de f. Alors $E_\lambda^\perp$ est f-stable.

2. Réduction

Thm. 10 : Soit $f \in End(E)$ normal, alors il existe une BON de E, $\mathcal{B}$, telle que [Go] p.220
$$mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & \tau_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & \tau_s \end{pmatrix}$$
avec $\forall i$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$
$\forall j$ $\tau_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

- De même, si M est une matrice normale, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que
$$M = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & \tau_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & \tau_s \end{pmatrix} {}^tP$$

Rmq : le lien entre "$\mathcal{B}$ est une BON" et "$P \in O_n(\mathbb{R})$" sera expliqué en prop. 14.

Application :

Thm. 11 : si $f \in \mathcal{A}(E)$, il existe une BON de E, $\mathcal{B}$, telle que [Go] p.261
$$mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & \tau_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & \tau_s \end{pmatrix}$$
avec $\forall i$ $\tau_i = \begin{pmatrix} 0 & -b_i \\ b_i & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

- De même, si $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ alors elle est orthogonalement semblable à une matrice de ce type.

Cor. 12 : si $\dim(E)$ est impair et $f \in \mathcal{A}(E)$, alors $det(f) = 0$. [Go] p.262

III - Endomorphismes Orthogonaux

1. Quelques propriétés

[Gr] p.239 **Prop. 13**: On a équivalence entre :
(i) $f \in O(E)$
(ii) $\forall x, y \in E$, $(f(x), f(y)) = (x, y)$
(iii) $\forall x \in E$, $\|f(x)\| = \|x\|$
(iv) si $\mathcal{B}$ est une BON, $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f) \in O_n(\mathbb{R})$

Rmq: $O(E)$ est l'ensemble des isométries linéaires.

Attention, les translations ne sont pas dans $O(E)$, elles sont affines.

[Gr] p.240 **Prop. 14**: $f \in \mathrm{End}(E)$ est orthogonal ssi il transforme toute BON en BON ssi il transforme une BON en BON.
- la matrice de passage d'une BON à une BON est orthogonale.

[Gr] p.239 **Prop. 15**: Soit $f \in O(E)$, alors $Sp(f) \subset \{-1, +1\}$ et $\det(f) = \pm 1$

Attention $\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1$ mais $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \notin O_2(\mathbb{R})$

Application:

[Gr] p.239 **Déf. 16**: les transformations orthogonales de déterminant 1 sont dites directes. Les autres sont indirectes.
- $SO(E)$ l'ensemble des transformations orthogonales directes.
  $SO_n(\mathbb{R}) = \{M \in O_n(\mathbb{R}) \,/\, \det(M) = 1\}$
- Ces ensembles sont les groupes spéciaux orthogonaux.

[Gr] p.241 **Prop. 17**: $SO(E) \lhd O(E)$ et $SO_n(\mathbb{R}) \lhd O_n(\mathbb{R})$

[Go] p.256 **Thm. 18**: Soit $f \in O(E)$, il existe une BON de E, $\mathcal{B}$, telle que

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} R_{\theta_1} & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & R_{\theta_r} & & & \\ & & & \varepsilon_1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \varepsilon_s \end{pmatrix}$$

avec $\forall i, \varepsilon_i \in \{\pm 1\}$ et $\forall j$, $R_{\theta_j} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_j) & -\sin(\theta_j) \\ \sin(\theta_j) & \cos(\theta_j) \end{pmatrix}$
$\theta_j \in \mathbb{R}$, $\theta_j \not\equiv 0\,[\pi]$.
- De même, $M \in O_n(\mathbb{R})$ est orthogonalement semblable à une telle matrice.

2. Application en dimension 2 et 3

Prop. 19: $SO_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \theta \in [0, 2\pi[\right\}$ rotation d'angle θ autour de O. [Gr] p.241

$O_2(\mathbb{R}) \setminus SO_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}, \theta \in [0, 2\pi[\right\}$ symétrie orthogonale

Cf annexe 1

Prop. 20: Toute matrice $M \in O_3(\mathbb{R})$ est orthogonalement semblable à une matrice [Gr] p.243

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

avec $\varepsilon = 1$ si $M \in SO_3(\mathbb{R})$ (rotation) et $\varepsilon = -1$ sinon (rotation et symétrie).

Cf annexe 2

Application: $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. $A \in SO_3(\mathbb{R})$ [Gr] p.245

$E_1 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\mathrm{Tr}(A) = 2 = 1 + 2\cos(\theta)$ donc $\theta = \pm \frac{\pi}{3}$

Soit $u \in E_1^{\perp}$, par exemple $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $f(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

On a $\sin(\theta) = \dfrac{\det\left(u, f(u), \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}{\|u\|^2 \left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\|} > 0$. Donc $\theta = \frac{\pi}{3}$

A représente la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$, d'axe dirigé par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Propriétés algébriques et topologiques

Prop. 21: $O_n(\mathbb{R})$ et $SO_n(\mathbb{R})$ sont des groupes compacts.

Prop. 22: $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arc. $O_n(\mathbb{R})$ admet deux composantes connexes, homéomorphes à $SO_n(\mathbb{R})$. [MT] p.34

Prop. 23: $O_n(\mathbb{R})$ est engendré par les réflexions orthogonales (symétrie par rapport à un hyperplan). [H2G2] p.237
$SO_n(\mathbb{R})$ est engendré par les retournements orthogonaux (symétrie par rapport à un sev de codim 2). [Ta] p.51

Prop. 24: Tout sous-groupe compact maximal de $GL_n(\mathbb{R})$ est conjugué à $O_n(\mathbb{R})$. [FGN] p.231

Prop. 25: $\exp : \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow SO_n(\mathbb{R})$ est surjective. [FGN] p.65

Prop. 26: $SO_3(\mathbb{R})$ est simple. $\boxed{\text{DVP}}$ [H2G2] p.239

IV- Endomorphismes Symétriques

1. Propriétés et Réduction

Prop. 27: $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

[Gr] p. 252 **Thm. 28:** soit $f \in S(E)$, alors il existe une BON, $\mathcal{B}$, de vecteurs propres pour f, telle que

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}, \forall i$$

De même si $M \in S_n(\mathbb{R})$ elle est orthogonalement semblable à une matrice diagonale réelle.

Application:

Déf. 29: $M \in S_n(\mathbb{R})$ est positive si $\forall X \in \mathbb{R}^n$, ${}^tXMX \geq 0$. On note $M \in S_n^+(\mathbb{R})$.
$M \in S_n^+(\mathbb{R})$ est définie positive si de plus $({}^tXMX = 0) \Rightarrow (X=0)$. On dit $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

[Gr] p. 254 **Prop. 30:** $M \in S_n(\mathbb{R})$ est une matrice de produit scalaire ssi $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ ssi $Sp(M) \subset \mathbb{R}_+^*$

[Go] p. 244 • Si ϕ est une forme quadratique sur E, alors il existe une BON dans laquelle la matrice de ϕ est diagonale réelle.

[Gr] p. 255 **Ex:** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ $A \in S_n(\mathbb{R})$ et $Sp(A) = \{2, 2+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}\} \subset \mathbb{R}_+^*$
donc A définit un produit scalaire.

2. Décomposition polaire

[Go] p. 246 **Lemme 31:** $f, g \in S(E)$ tq $fg = gf$. Alors f et g se diagonalise dans une même base, de vecteurs propres, orthonormée.

[MT] p. 19 **Thm. 32:** l'application $\begin{aligned} O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) &\longrightarrow Gl_n(\mathbb{R}) \\ (O, S) &\longmapsto OS \end{aligned}$ est un homéomorphisme.

Applications:

[FGN] p. 130 • **Prop. 33:** les points extrémaux de la boule unité de $\mathcal{L}(E)$ sont exactement $O(E)$. $\boxed{\text{DVP}}$

[FGN] p. 229 • Ellipsoïde de John-Loewner: K compact de $\mathbb{R}^n$, tq $\mathring{K} \neq \emptyset$. Il existe un unique ellipsoïde centré en O, de volume minimal, contenant K.

3. Autres applications

Prop. 34: Soit $M \in S_n^+(\mathbb{R})$ alors il existe une unique $R \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $R^2 = M$. [Go] p. 245

Prop. 35: $\exp : S_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme. $\boxed{\text{DVP}}$ [MT] p. 61

Thm. 36 (Minimax de Courant-Fischer) [FGN] p. 142
Soit $f \in S(E)$, $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ ses valeurs propres. Soit A_h l'ensemble des sev de E de dimension h. Alors on a :

$$\forall h, \quad \lambda_h = \min_{F \in A_h}\left[\max_{\substack{x \in F \\ \|x\|=1}} (f(x), x)\right] = \max_{F \in A_{n-h+1}}\left[\min_{\substack{x \in F \\ \|x\|=1}} (f(x), x)\right]$$

Références :

[Go] X. Gourdon, Algèbre

[Gr] J. Grifone

[FGN] Oraux X-ENS Algèbre 3

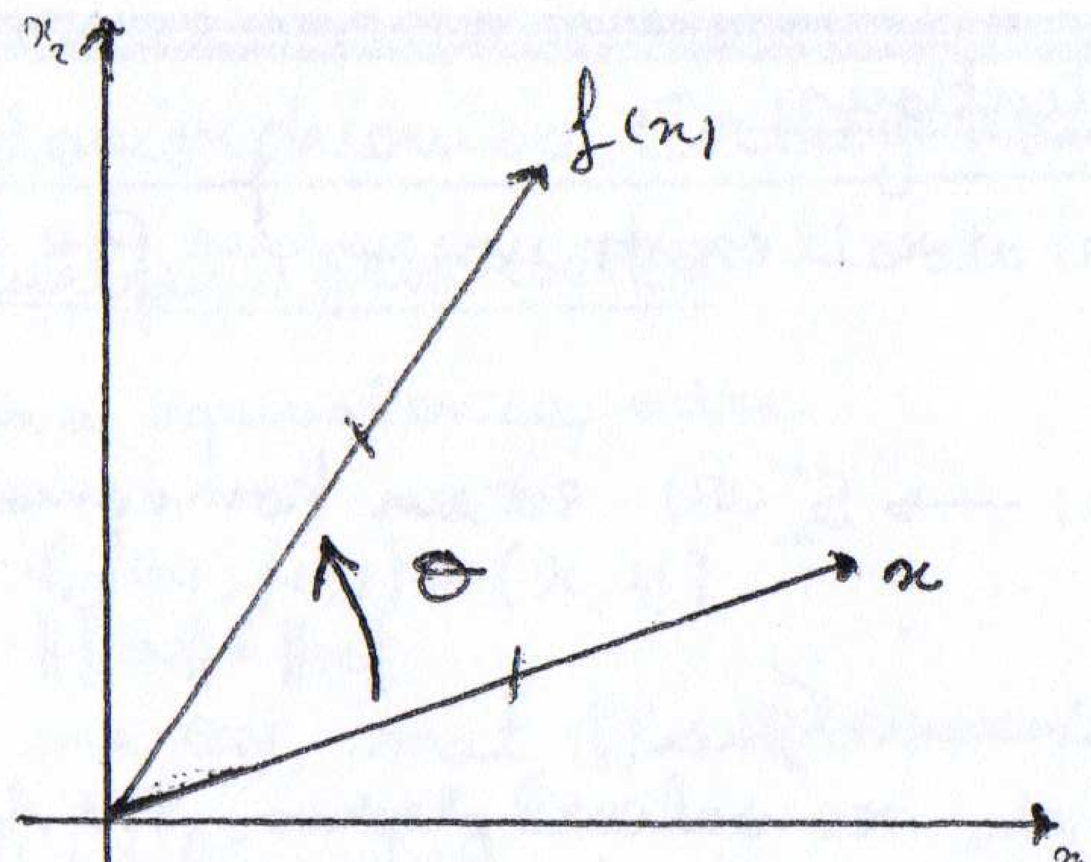
[MT] R. Mneimné, F. Testard,

[H2G2] P. Caldero, J. Germoni, Histoires hédonistes de groupes et de géométries

[Au] M. Audin, Géométrie

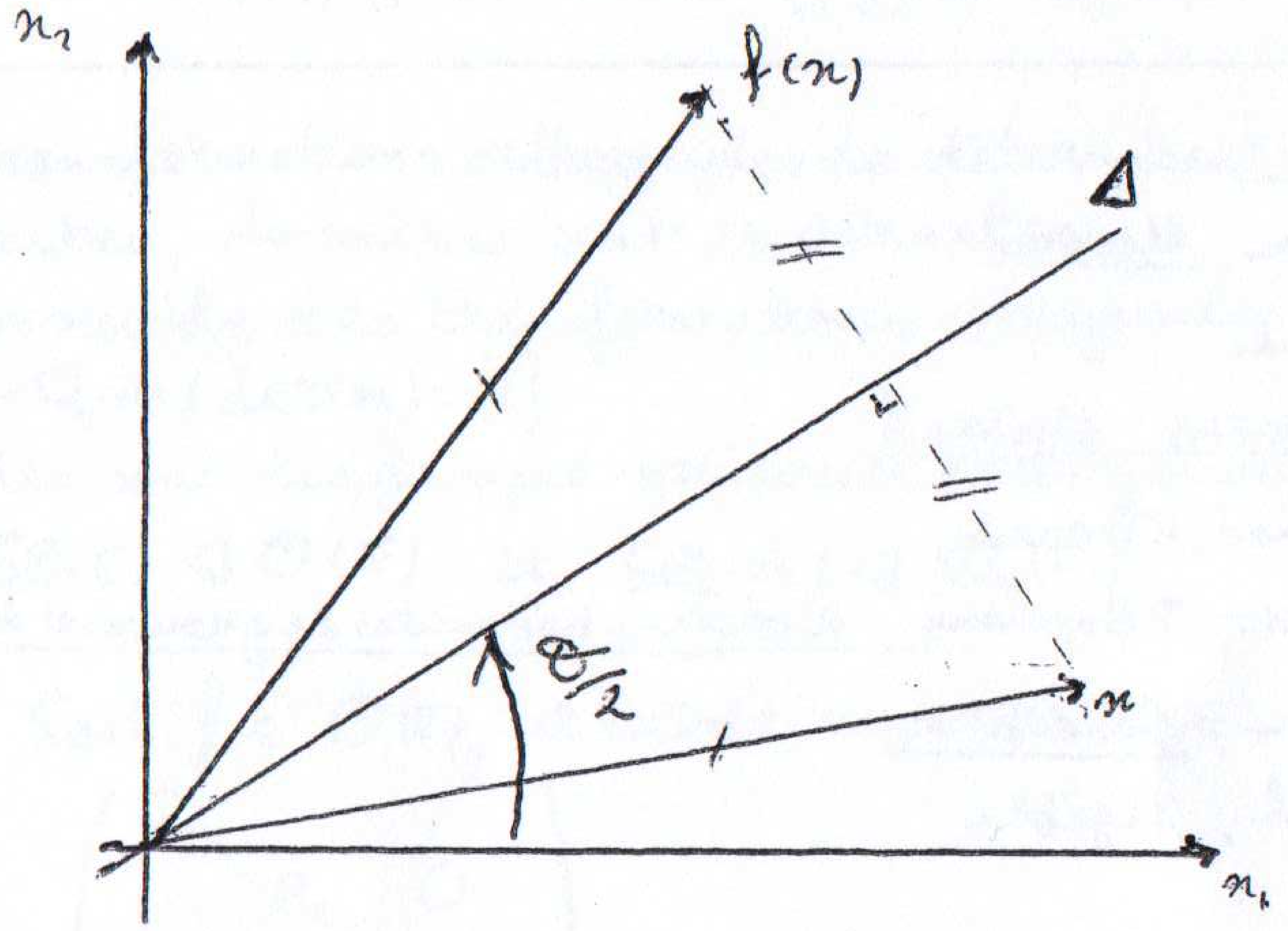
[Ta] P. Tauvel, Algèbre

Annexe 1.



$f \in SO(\mathbb{R}^2)$

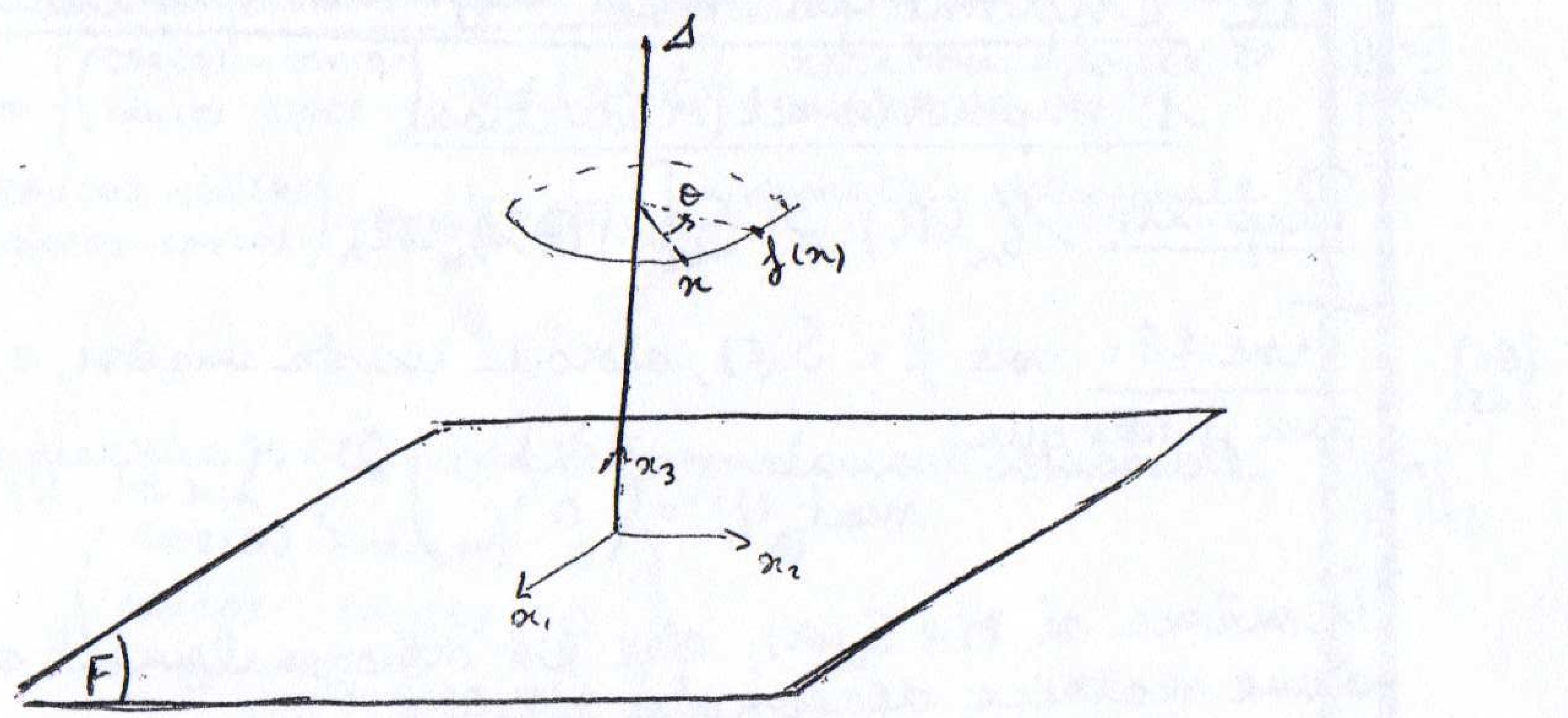
rotation d'angle θ



$f \in O(\mathbb{R}^2) \setminus SO(\mathbb{R}^2)$

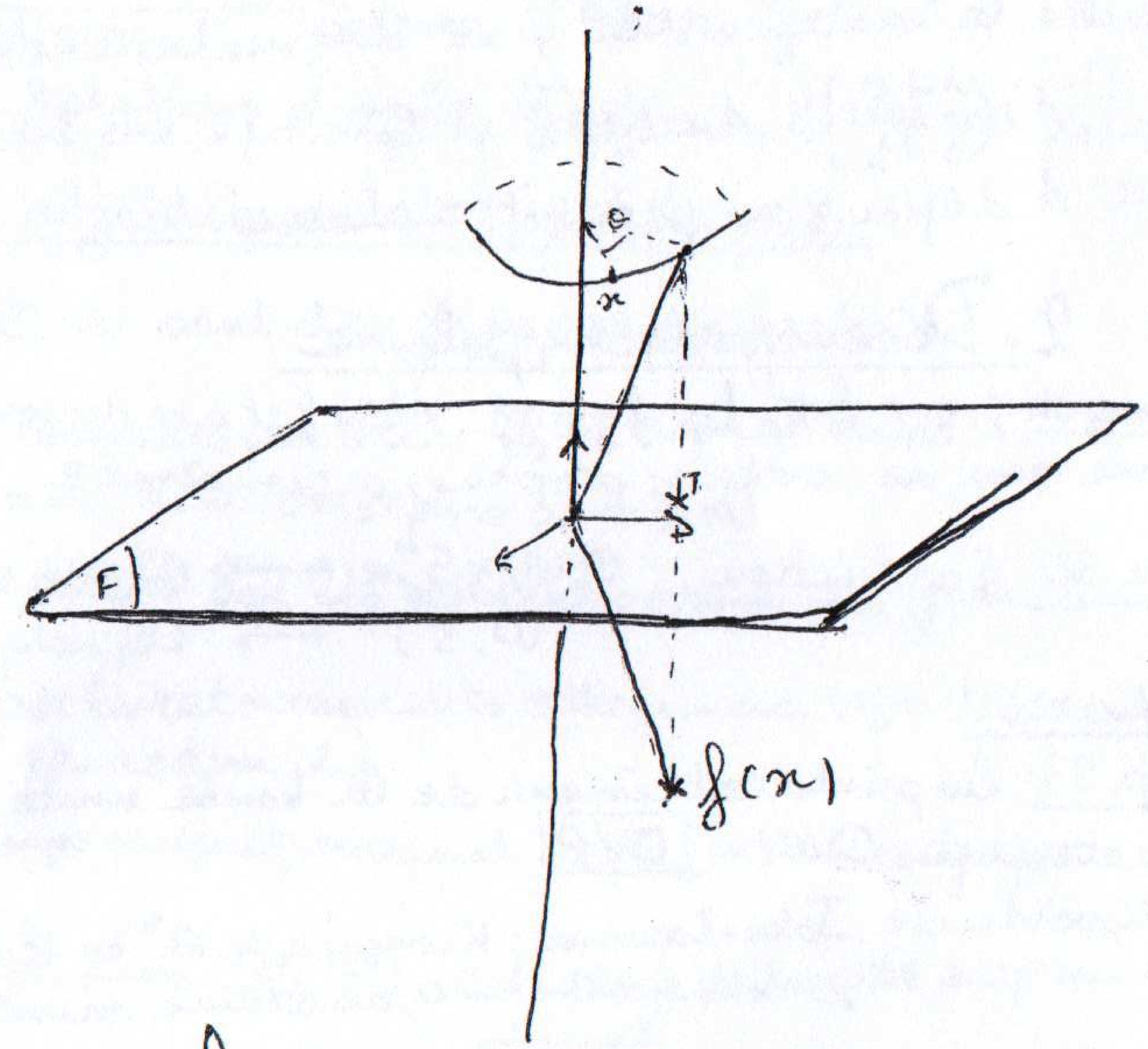
symétrie par rapport à (Δ)

Annexe 2.



$f \in SO(\mathbb{R}^3)$

rotation d'axe (Δ) et d'angle θ.



$f \in O(\mathbb{R}^3) \setminus SO(\mathbb{R}^3)$

composée d'une rotation d'axe Δ et angle θ avec une symétrie par rapport à F.