Simplicité de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$

Références : Caldero, Germoni, *Histoires hédonistes de groupes et de géométrie*, p237

On va commencer par prouver quelques propriétés sur $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ que l'on utilisera dans la suite pour prouver la simplicité de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$. On conclura sur l'éventuelle simplicité des autres groupes spéciaux orthogonaux.

Théorème.

$\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est compact et connexe (par arcs).

Démonstration. 1) On définit l'application ϕ qui à $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe ${}^{\mathrm{t}}MM$. Elle est continue car chacune des composantes est un polynôme en les coefficients de la matrice en entrée. Donc $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) = \phi^{-1}\{I_n\} \cap \overset{-1}{\det}\{1\}$ est fermé.
D'autre part, on prend la norme liée au produit scalaire $(A, B) = \mathrm{Tr}({}^{\mathrm{t}}AB)$ sur l'espace des matrices et on remarque que $\|M\| = \sqrt{\mathrm{Tr}({}^{\mathrm{t}}MM)} = \sqrt{n}$ pour $M \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$. Donc $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est borné (pour toute norme car elles sont équivalentes).
Comme on est en dimension finie, $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est compact.

2) Continuons avec la connexité. Soit $M \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, on va créer un chemin continu liant M à I_n. Ainsi on pourra relier deux matrices par un chemin continu en passant par l'identité.
Le théorème de réduction donne l'existence d'une matrice $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$M = P \begin{pmatrix} I_r & & & & \\ & -I_{2p} & & & \\ & & R_{\theta_1} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & R_{\theta_s} \end{pmatrix} {}^{\mathrm{t}}P \text{ avec } R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

On pose alors pour $t \in [0, 1]$, $N(t) = \begin{pmatrix} I_r & & & & & & \\ & R_{t\pi} & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & R_{t\pi} & & & \\ & & & & R_{t\theta_1} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & R_{t\theta_s} \end{pmatrix}$.

Ainsi $\gamma(t) := PN(t){}^{\mathrm{t}}P$ est une application continue de $[0, 1]$ dans $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ qui relie M à I_n. □

On peut maintenant prouver le théorème suivant.

Théorème.

$\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ est un groupe simple.

Démonstration. Soit $H \lhd \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ non trivial, il nous faut montrer que $H = \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$. On admet que les retournements engendrent $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$. Ceux-ci sont conjugués dans $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ (donc l'ensemble des retournements est stable par automorphisme intérieur). On en déduit que si H contient un retournement, comme il est distingué, il les contient tous et donc $H = \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

• Pourquoi les retournements sont-ils conjugués ?
Soient r_D et $r_{D'}$ deux retournements de droites respectives D et D'. On choisit d et d' deux vecteurs unitaires engendrant chacun leur droite associée. On peut ensuite trouver une base orthonormée de $D^\perp$: (e_1, e_2) (et de même on peut trouver (e_1', e_2') base de $D'^\perp$). Finalement on obtient deux bases orthonormées (d, e_1, e_2) et (d', e_1', e_2'). La matrice de passage de l'une à l'autre est donc orthogonale. Quitte à poser $d'' = -d'$, on a une

matrice de passage de déterminant 1, donc dans $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

• Pourquoi les retournement engendrent-ils $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$?
C'est une conséquence du théorème de Cartan-Dieudonné [1]. Ce théorème affirme que le groupe $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est engendré par les réflexions. Un élément $u \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ est donc le produits d'un nombre pair de réflexions (pair car son déterminant est 1). On peut toutes les multiplier par (-1). Or si τ est une réflexion, alors $-\tau$ est un retournement (il suffit de diagonaliser les matrice pour s'en rendre compte). Donc u est un produit de retournements.

• Pourquoi H contient-il un retournement ?
Soit $h \in H$ non trivial, on pose $\phi : \begin{array}{ccc} \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ g & \mapsto & \mathrm{Tr}(ghg^{-1}h^{-1}) \end{array}$.
— $\phi(I_3) = 3$ donc $3 \in \mathrm{Im}(\phi)$,
— $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ est connexe donc $\phi(\mathrm{SO}_3(\mathbb{R}))$ est un intervalle contenant 3,
— $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ est compact donc $\phi(\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})) = [a, b]$ avec $a \leqslant 3 \leqslant b$,
— la trace d'un élément de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ est de la forme $1 + 2\cos(\theta)$, donc $\phi(\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})) = [a, 3]$ avec $a \in [-1, 3]$.

Supposons que $a = 3$, alors $\forall g \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, $ghg^{-1}h^{-1} = I_3$ (le théorème de réduction donne qu'il y a une unique matrice de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ de trace 3). Donc $h \in Z(\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})) = I_3$ [2]. C'est absurde !

Donc $a < 3$, donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a < 1 + 2\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) < 3$ (car $3 = \lim\limits_{n\to\infty} 1 + 2\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$). On note g_n tel que $\phi(g_n) = 1 + 2\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$. Alors $h_n := g_n h g_n^{-1} h^{-1} \in H$ (car $h^{-1} \in H$ et $g_n h g_n^{-1} \in H$ car H est distingué) et est une rotation d'angle $\pm\frac{\pi}{n}$.
Donc h_n^n est dans H et est une rotation d'angle π, donc un retournement. □

Remarque : qu'en est-il des autres groupes spéciaux orthogonaux ?
Si n est pair, $< \pm I_n > \lhd \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ donc $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ n'est pas simple. On pose ainsi naturellement les groupes $\mathrm{PSO}_n(\mathbb{R}) = \begin{cases} \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})/ < \pm I_n > & \text{si } n \text{ est pair} \\ \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$.
On peut alors montrer que $\mathrm{PSO}_n(\mathbb{R})$ est simple pour $n = 3$ et $n \geqslant 5$. C'est faux pour $n = 4$ car $\mathrm{PSO}_4(\mathbb{R}) \simeq \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \times \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ (en le faisant agir sur les quaternions, fait dans H2G2). Pour $n = 2$, $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est abélien donc $\mathrm{PSO}_2(\mathbb{R})$ aussi ; en particulier, il n'est pas simple.
• Pour prouver les cas de simplicité de $\mathrm{PSO}_n(\mathbb{R})$, on utilise le même type de démonstration que celle vue ici. On se ramène même à la simplicité de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$. Pas mal comme application tout de même, non ?

1. À ce sujet on pourra lire `http://florian.bouguet.free.fr/doc/developpements/cartan_dieudonne.pdf`.
2. En effet, soit $u \in Z(\mathrm{SO}_3(\mathbb{R}))$, alors pour toute droite D de l'espace, si on note r_D le retournement de droite D, on a $r_D = u r_D u^{-1} = r_{u(D)}$. On en déduit $D = u(D)$ pour toute droite D de l'espace. C'est un exo de sup classique de montrer qu'alors, u est une homothétie. Il n'y a qu'une homothétie dans $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, c'est l'identité.