

Une méthode de résolution d'EDP avec des martingales

Adrien Laurent
ENS Rennes - Université de Rennes 1

2016 - 2017

Table des matières

Introduction	2
I Résolution théorique du problème de Dirichlet	3
1 Présentation du problème, propriété de la moyenne	3
2 Algorithme, convergence	4
3 Existence et unicité pour le problème de Dirichlet	6
II Implémentation numérique de la méthode, résultats, convergence	8
1 Implémentation	8
2 Résultats numériques	8
3 Convergence de l'algorithme	9
III Résolution numérique de l'équation de la chaleur	11
1 Adaptation du WOS à l'équation de la chaleur : le WOMS	11
2 Quelques résultats numériques	12
Conclusion	14
Appendices	16
A Programmes pour le problème de Dirichlet	17
B Programmes pour l'équation de la chaleur	19

Introduction

Les équations aux dérivées partielles possèdent déjà tout un panel de méthodes pour les comprendre, les modéliser et parfois les résoudre. En particulier, on peut citer les formulations variationnelles pour les équations elliptiques et la méthode numérique qui s'en déduit : les éléments finis. Ici on va étudier deux EDP particulières : l'équation de Laplace et l'équation de la chaleur. Il est important de préciser qu'on les étudiera sur un ensemble borné.

L'idée de ce séminaire est d'utiliser des probabilités pour résoudre ces équations de manière numérique et théorique (pour l'équation de Laplace). A cette fin, on va utiliser la propriété de moyenne vérifiée par ces équations pour créer une martingale qui nous permettra d'approcher la solution de ces problèmes.

Une fois ce travail fait pour le problème de Dirichlet, on en déduira une méthode numérique de résolution de ce problème et on tâchera d'adapter ces mêmes idées à la résolution de l'équation de la chaleur.

Je me suis efforcé d'éparpiller des simulations numériques tout au long de ce rapport. Le lecteur curieux pourra directement venir me demander des détails sur les programmes que je n'ai pas copiés ici, faute de place.

Il ne me reste pour finir qu'à vous souhaiter bonne lecture.

Chapitre I

Résolution théorique du problème de Dirichlet

1 Présentation du problème, propriété de la moyenne

Soit D un ouvert borné de \mathbb{R}^d où $d \in \mathbb{N}^*$. On se donne une norme quelconque sur \mathbb{R}^d . D est l'ensemble sur lequel on souhaite résoudre le problème de Dirichlet.

Puis soit $f : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. C'est la condition au bord de notre problème.

Alors le problème de Dirichlet consiste à trouver une fonction h telle que :

$$(DP) \begin{cases} h \in \mathcal{C}(\overline{D}, \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^2(D, \mathbb{R}) \\ \Delta h = 0 \text{ dans } D \\ h = f \text{ sur } \partial D \end{cases}.$$

Définition.

- On dit qu'une fonction $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 est harmonique si $\Delta u = 0$.
- On dit qu'une fonction $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie la propriété de la moyenne si pour tout $x \in D$ et $r > 0$ tel que $\overline{B_r(x)} := \overline{B(x, r)} \subset D$, on a

$$u(x) = \frac{1}{\sigma(S_r(x))} \int_{\partial B_r(x)} u(z) d\sigma(z),$$

où $S_r(x)$ est la sphère centrée en x de rayon r , et σ est la mesure surfacique de Lebesgue sur \mathbb{R}^d .

À présent, on se donne un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On note W_t un mouvement brownien (non forcément issu de 0), et τ_{B_r} le temps d'atteinte de B_r par W_t . Enfin si $W_0 = x$, on note \mathbb{P}_x la probabilité et \mathbb{E}_x l'espérance sachant $W_0 = x$.

On pose alors la mesure μ_r sur ∂B_r définie par

$$\mu_r(A) = \mathbb{P}_0(W_{\tau_{B_r}} \in A).$$

Elle est bien définie car $W_{\tau_{B_r}} \in \partial B_r$.

De plus, comme la loi du mouvement brownien est invariante par rotation, μ_r est invariante par rotation, donc est proportionnelle à σ . Comme c'est une mesure, on a nécessairement

$$\mu_r = \frac{\sigma}{\sigma(S_r)}.$$

Proposition.

$u : D \rightarrow \mathbb{R}$ est harmonique si et seulement si u vérifie la propriété de la moyenne.

Démonstration. • Supposons que u est harmonique, alors par la formule d'Itô, on a

$$u(W_{t \wedge \tau_{B_r(x)}}) = u(W_0) + \int_0^{t \wedge \tau_{B_r(x)}} \nabla u(W_s) \cdot dW_s + \frac{1}{2} \int_0^{t \wedge \tau_{B_r(x)}} \underbrace{\Delta u(W_s)}_{=0} ds.$$

Donc

$$\mathbb{E}_x[u(W_{t \wedge \tau_{B_r(x)}})] = \mathbb{E}_x[u(W_0)] = u(x).$$

Par convergence dominée, on a donc

$$u(x) = \mathbb{E}_x[u(W_{\tau_{B_r(x)}})] = \int_{\partial B_r(x)} u(z) d\mu_r(z) = \frac{1}{\sigma(S_r(x))} \int_{\partial B_r(x)} u(z) d\sigma(z).$$

Donc u vérifie la propriété de la moyenne.

• Réciproquement, si u vérifie la propriété de la moyenne, par théorème de dérivation sous l'intégrale, u est de classe \mathcal{C}^∞ .

On utilise un développement de Taylor : si $y \in S_r(x)$,

$$u(x+y) = u(x) + y \cdot \nabla u(x) + \frac{1}{2} D^2 u(x)(y, y) + o(r^2).$$

Les symétries donnent $\int_{\partial B_r(x)} y_i d\sigma = 0$ et $\int_{\partial B_r(x)} y_i y_j d\sigma = 0$ si $i \neq j$. D'où en intégrant sur $S_r(0)$:

$$u(x) = \frac{1}{\sigma(S_r(x))} \int_{\partial S_r(0)} u(x+y) d\sigma(y) = u(x) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x) \frac{1}{\sigma(S_r(x))} \int_{\partial S_r(0)} y_i^2 d\sigma(y) + o(r^2).$$

Or

$$\frac{1}{\sigma(S_r(x))} \int_{\partial S_r(0)} y_i^2 d\sigma(y) = \frac{1}{d \times \sigma(S_r(0))} \int_{\partial S_r(0)} \|y\|^2 d\sigma(y) = \frac{r^2}{d},$$

donc

$$u(x) = u(x) + \frac{r^2}{2d} \Delta u(x) + o(r^2).$$

On en déduit $\Delta u(x) = 0$, et ceci pour tout $x \in D$. Donc u est harmonique. \square

Remarque : Cette caractérisation des fonctions harmoniques par une formule de la moyenne est l'ingrédient principal de notre algorithme. En fait, une formule de la moyenne bien posée donne immédiatement un algorithme pour approximer la solution d'une EDP.

2 Algorithme, convergence

Afin de résoudre le problème de Dirichlet, on va définir une certaine suite de variables aléatoires en mimant la formule de la moyenne. Cette suite sera une martingale que l'on s'efforcera de faire converger.

Pour $x \in D$, $r \in]0, 1]$ et $(U_n)_n$ une suite de variables aléatoires iid de loi uniforme sur S^d , on définit la suite $(X_r^x(n))_n$ par

$$\begin{cases} X_r^x(1) = x \\ X_r^x(n+1) = X_r^x(n) + rd(X_r^x(n), \partial D)U_n \end{cases}.$$

Proposition.

Si $g : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et harmonique dans D , alors $(g(X_r^x(n)))_n$ est une martingale pour la filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(X_r^x(1), \dots, X_r^x(n))$.

Démonstration. • Tout d'abord, on remarque que, par définition, $X_r^x(n) \in \overline{D}$, donc la suite est bien définie. De plus, comme \overline{D} est compact, $g(X_r^x(n)) \in L^\infty \subset L^1$.

• On remarque ensuite que $\mathcal{F}_n = \sigma(U_1, \dots, U_{n-1})$ donc U_n est indépendant de \mathcal{F}_n .

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[g(X_r^x(n+1)) | \mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[g(X_r^x(n) + rd(X_r^x(n), \partial D)U_n) | \mathcal{F}_n] \\ &= \mathbb{E}[g(y + rd(y, \partial D)U_n)] \Big|_{y=X_r^x(n)} \\ &= \frac{1}{\sigma(S_{r \times d(y, \partial D)}(y))} \int_{S_{r \times d(y, \partial D)}(y)} g(z) d\sigma(z) \Big|_{y=X_r^x(n)} \\ &= g(X_r^x(n)) \end{aligned}$$

car g vérifie la propriété de la moyenne.

On en déduit ainsi que $(g(X_r^x(n)))_n$ est une martingale. □

Proposition.

La suite $(X_r^x(n))_n$ converge presque sûrement vers un point $X_r^x(\infty) \in \partial D$.

Démonstration. • Soit Π_i la projection sur la i -ème coordonnée. Π_i est continue sur \overline{D} et harmonique sur D , donc $(\Pi_i(X_r^x(n)))_n$ est une martingale. Elle est de plus bornée car Π_i est bornée sur le compact \overline{D} .

Par théorème de convergence des martingales bornées (voir [4], p.236), $(\Pi_i(X_r^x(n)))_n$ converge presque sûrement vers une variable aléatoire L^1 que l'on note $X_r^{x,(i)}(\infty)$. On pose $X_r^x(\infty) = (X_r^{x,(1)}(\infty), \dots, X_r^{x,(d)}(\infty))$, alors $(X_r^x(n))_n$ converge presque sûrement vers $X_r^x(\infty)$.

• Montrons que $X_r^x(\infty) \in \partial D$ sur l'ensemble de mesure pleine où il y a convergence. Par l'absurde, supposons que sur un certain ensemble $\Omega' \subset \Omega$ tel que $\mathbb{P}(\Omega') > 0$, on ait

$$\forall \omega \in \Omega', X_r^x(n, \omega) \rightarrow X_r^x(\infty, \omega) \notin \partial D.$$

Comme ∂D est fermé, $d(X_r^x(\infty, \omega), \partial D) > 0$, donc

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_0, \|X_r^x(n, \omega) - X_r^x(\infty, \omega)\| < \frac{r}{4} d(X_r^x(\infty, \omega), \partial D). \quad (\text{I.1})$$

Par inégalité triangulaire, on déduit

$$\|X_r^x(n_0, \omega) - X_r^x(n_0 + 1, \omega)\| < \frac{r}{2} d(X_r^x(\infty, \omega), \partial D). \quad (\text{I.2})$$

Or $X_r^x(n_0 + 1) = X_r^x(n_0) + rd(X_r^x(n_0), \partial D)U_{n_0}$, donc comme U_{n_0} est de norme 1,

$$\|X_r^x(n_0, \omega) - X_r^x(n_0 + 1, \omega)\| = rd(X_r^x(n_0, \omega), \partial D). \quad (\text{I.3})$$

Enfin par inégalité triangulaire,

$$d(X_r^x(\infty, \omega), \partial D) \leq \|X_r^x(n_0, \omega) - X_r^x(\infty, \omega)\| + d(X_r^x(n_0, \omega), \partial D),$$

donc par I.1,

$$d(X_r^x(\infty, \omega), \partial D) < \frac{r}{4} d(X_r^x(\infty, \omega), \partial D) + d(X_r^x(n_0, \omega), \partial D).$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{r}{4}\right) d(X_r^x(\infty, \omega), \partial D) &< d(X_r^x(n_0, \omega), \partial D) \\ &< \frac{1}{r} \|X_r^x(n_0, \omega) - X_r^x(n_0 + 1, \omega)\| \text{ par I.3} \\ &< \frac{1}{2} d(X_r^x(\infty, \omega), \partial D) \text{ par I.2} \end{aligned}$$

Nécessairement $1 - \frac{r}{4} < \frac{1}{2}$, c'est à dire $r > 2$.

C'est absurde!

Donc $X_r^x(\infty) \in \partial D$ sur l'ensemble où il y a convergence. □

3 Existence et unicité pour le problème de Dirichlet

Maintenant que la convergence de la suite est prouvée, on va approximer la solution du problème de Dirichlet avec $X_r^x(\infty)$.

Théorème (Existence).

Supposons que pour tout $x_0 \in \partial D$ et $r \in]0, 1]$,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in D}} \mathbb{E}[f(X_r^x(\infty))] = f(x_0), \quad (\text{I.4})$$

alors une solution du problème de Dirichlet est donnée par

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \partial D \\ \mathbb{E}[f(X_r^x(\infty))] & \text{si } x \in D \end{cases} .$$

Démonstration. • Commençons par montrer que h ne dépend pas de r .

La fonction f est continue sur ∂D , donc on peut l'étendre par le théorème de Tietze-Urisohn en une fonction continue \tilde{f} sur $D_1 = \{x \in \mathbb{R}^d, d(x, D) < 1\}$.

Pour continuer, on a besoin d'un lemme que l'on admettra.

Lemme.

Il existe une suite $(f_\varepsilon)_\varepsilon$ de fonctions harmoniques sur D_1 telle que f_ε converge uniformément sur $\overline{D} \subset D_1$ vers f .

On a $\|\tilde{f} - f_\varepsilon\|_{\infty, \overline{D}} \rightarrow 0$ donc $(f_\varepsilon)_\varepsilon$ est bornée uniformément en ε .

On peut donc faire des convergences dominées sans aucun problème.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(\underbrace{X_r^x(\infty)}_{\in \partial D})] &= \mathbb{E}[\tilde{f}(X_r^x(\infty))] \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{E}[f_\varepsilon(X_r^x(\infty))] \text{ par convergence dominée} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[f_\varepsilon(X_r^x(n))] \text{ par convergence dominée} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_\varepsilon(x) \text{ car } (f_\varepsilon(X_r^x(n)))_n \text{ est une martingale} \\ &= \tilde{f}(x) \end{aligned}$$

Or \tilde{f} est indépendant de r , donc h est bien définie indépendamment de r et h coïncide avec \tilde{f} sur \overline{D} .

• Montrons que h est harmonique sur D .

Soient $x \in D$, et s tel que $B_s(x) \in D$, on pose aussi $r = \frac{s}{d(x, \partial D)} \leq 1$.

Par récurrence, on remarque que $\forall n \geq 3$, $X_r^x(n) = X_r^{X_r^x(2)}(n-1)$, donc

$$\mathbb{E}[\tilde{f}(X_r^x(n)) | X_r^x(2)] = \mathbb{E}[\tilde{f}(X_r^Y(n-1))] \Big|_{Y=X_r^x(2)} .$$

Comme \tilde{f} est bornée et continue, par convergence dominée, on a

$$\mathbb{E}[\underbrace{\tilde{f}(X_r^x(\infty))}_{=f(X_r^x(\infty))} | X_r^x(2)] = \mathbb{E}[\underbrace{\tilde{f}(X_r^Y(\infty))}_{=f(X_r^Y(\infty))}] \Big|_{Y=X_r^x(2)} .$$

D'où il vient que

$$\begin{aligned}
 h(x) &= \mathbb{E}[f(X_r^x(\infty))] \\
 &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[f(X_r^x(\infty)) | X_r^x(2)]] \\
 &= \mathbb{E}[h(X_r^x(2))] \\
 &= \mathbb{E}[h(x + \underbrace{rd(x, \partial D)}_{=s} U_1)] \\
 &= \frac{1}{\sigma(S_s(x))} \int_{S_s(x)} h(z) d\sigma(z)
 \end{aligned}$$

Ainsi h est harmonique car elle vérifie la propriété de la moyenne.

- Enfin la condition

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in D}} \mathbb{E}[f(X_r^x(\infty))] = f(x_0)$$

donne la continuité de h sur \overline{D} . □

Théorème (Unicité).

Le problème de Dirichlet sur D a au plus une solution.

Démonstration. Soit h une solution du problème de Dirichlet.

Soit $x \in D$, par continuité de h , on a presque sûrement

$$h(X_1^x(n)) \rightarrow h(X_1^x(\infty)) = f(X_1^x(\infty)).$$

Or $(h(X_1^x(n)))_n$ est une martingale donc

$$h(x) = \mathbb{E}[h(X_1^x(1))] = \mathbb{E}[h(X_1^x(n))].$$

Comme h est bornée, par convergence dominée,

$$\mathbb{E}[h(X_1^x(n))] \rightarrow \mathbb{E}[f(X_1^x(\infty))].$$

Finalement on a bien l'unicité car h est donnée par

$$h(x) = \mathbb{E}[f(X_1^x(\infty))].$$

□

Remarque : Ces deux résultats sont particulièrement intéressants car nous n'avons demandé aucune régularité sur D . Cependant nous avons à la place la condition I.4, qu'il est difficile de vérifier.

Chapitre II

Implémentation numérique de la méthode, résultats, convergence

1 Implémentation

Le but ici va être d'approximer numériquement la valeur $h(x) = \mathbb{E}[f(X_r^x(\infty))]$ où la suite $(X_r^x(n))_n$ est donnée par

$$\begin{cases} X_r^x(1) = x \\ X_r^x(n+1) = X_r^x(n) + rd(X_r^x(n), \partial D)U_n \end{cases} .$$

On peut choisir n'importe quel r . Celui-ci agit comme un paramètre de précision de plus : plus r est proche de 0, plus l'algorithme est lent et précis.

Pour approcher une manifestation de $X_r^x(\infty)$, on se donne $\varepsilon > 0$ et on calcule les termes de la suite $(X_r^x(n))_n$ tant que $d(X_r^x(n), \partial D) > \varepsilon$. Les U_n sont faciles à obtenir : il suffit de quotienter une loi normale d-dimensionnelle par sa norme 2 pour obtenir une loi uniforme sur S^d .

Dès que $d(X_r^x(n_0), \partial D) \leq \varepsilon$, on définit l'approximation numérique de $X_r^x(\infty)$ comme une projection de $X_r^x(n_0)$ sur ∂D .

Cet algorithme est nommé WOS pour *Walk On Spheres*.

Pour approximer $h(x)$, on utilise une méthode de Monte-Carlo : on lance beaucoup de trajectoires et on fait la moyenne des quantités obtenues.

Les programmes associées sont détaillés dans l'annexe A (en Matlab).

2 Résultats numériques

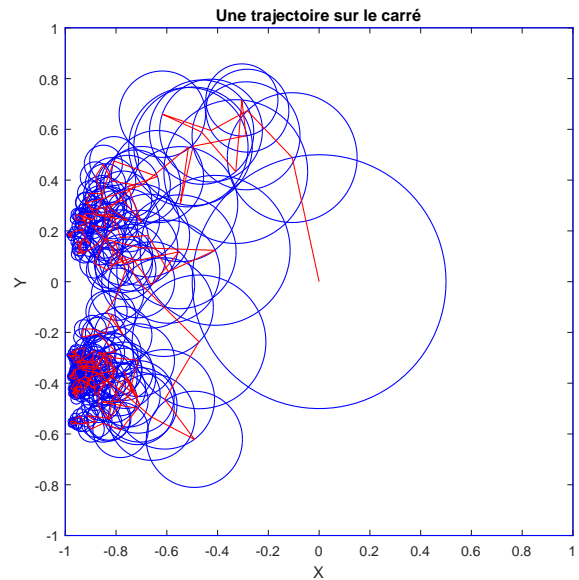
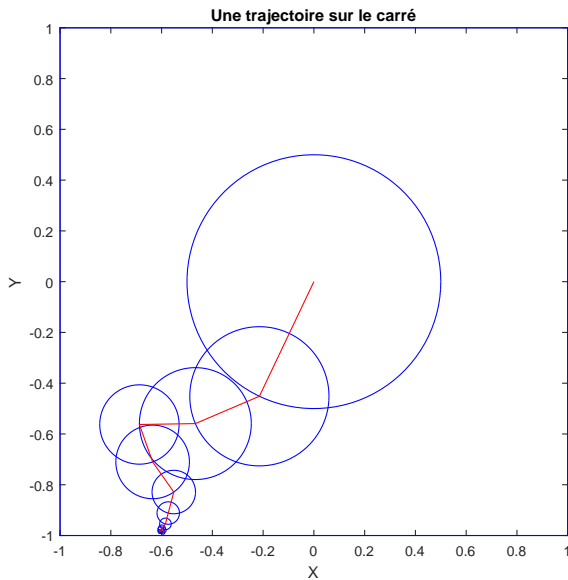
Pour simplifier, on choisit pour domaine D le carré centré en 0 de longueur 2. La fonction de bord f est

$$f(x, y) = \sin(y)e^x.$$

La solution explicite de ce problème de Dirichlet est

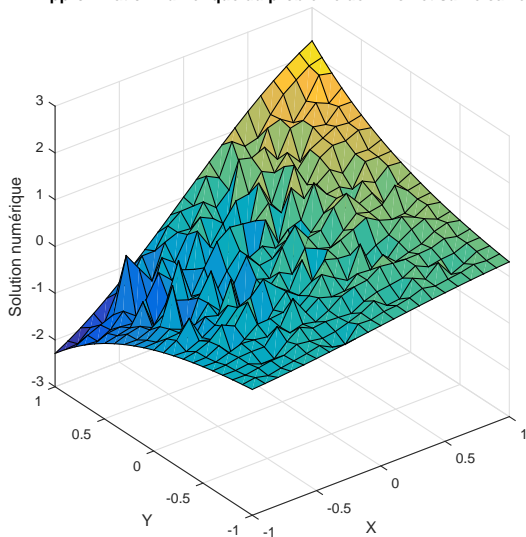
$$h(x, y) = \sin(y)e^x.$$

Ci-dessous, on peut trouver deux trajectoires. À chaque itération, on choisit au hasard un des points sur le cercle comme nouveau point de la suite. On a pris $r = 0.5$ et $\varepsilon = 0.01$. On remarque qu'une trajectoire peut arriver près du bord en un temps plus ou moins long.



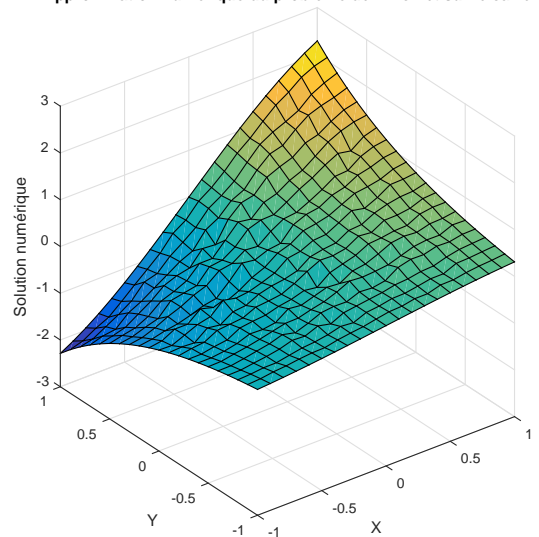
Après avoir calculé un certain nombre de trajectoires (X_n), on peut faire la moyenne des $f(X_n)$ pour approximer $h(x)$ (pour x pris sur un maillage du carré).
 Suivant le nombre de trajectoire lancées, on obtient des résultats plus ou moins crédibles.

Approximation numérique du problème de Dirichlet sur le carré



10 trajectoires par point de maillage

Approximation numérique du problème de Dirichlet sur le carré



200 trajectoires par point de maillage

L'algorithme approche bien l'unique solution du problème de Dirichlet. Il est néanmoins très lent (à cause de l'erreur Monte-Carlo).

Remarque : Cette lenteur le rend inutile dans des cas aussi simples que celui étudié ici. On préférerait de loin une méthode de différences ou d'éléments finis. Néanmoins, sur un domaine moins régulier, ou en grande dimension, ce type d'algorithme se révèle bien plus simple à programmer et converge même parfois mieux que les méthodes usuelles.

3 Convergence de l'algorithme

Dans l'article [1], Binder et Braverman ont montré que dans le cas du carré, la convergence du WOS (i.e. le nombre d'itérations faites en moyenne) est en $\mathcal{O}(\log(\varepsilon))$. Le résultat général dépend de la

géométrie et notamment de la dimension de Hausdorff de D .

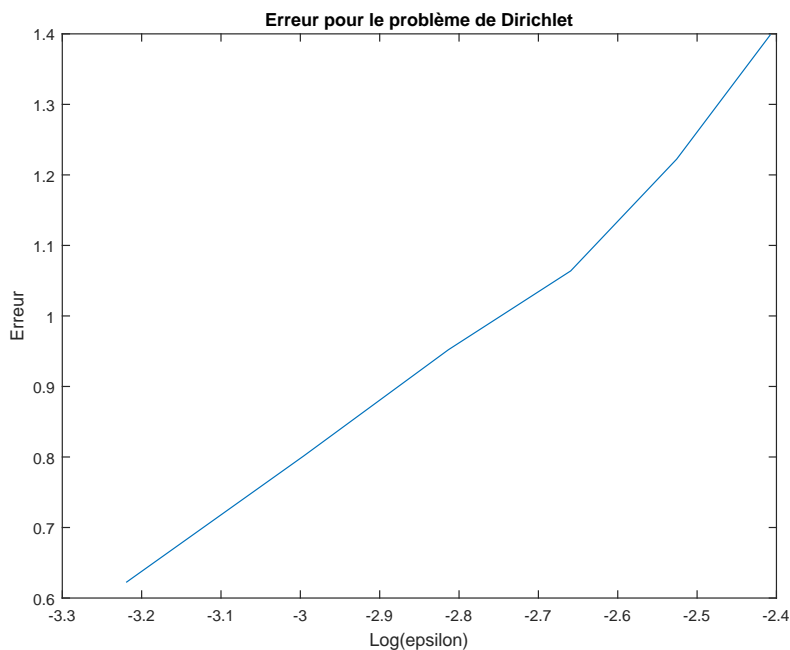
Ici, on va tenter de montrer numériquement que la solution approchée u^ε de l'exemple choisi converge vers la solution exacte u en $\mathcal{O}(\log(\varepsilon))$ en norme L^∞ .

Pour cela on fait varier ε et on calcule la norme l^∞ de l'erreur en chaque point de maillage. On est obligé de prendre ε assez petit, sinon on ne prend pas en compte tous les points du maillage dans WOS. La condition ici est

$$\varepsilon < \frac{1}{N_{\text{maillage}}}.$$

On est aussi contraint de prendre un grand nombre de trajectoires à chaque point de maillage pour éviter l'erreur Monte-Carlo.

On obtient la courbe d'erreur suivante :



On voit se distinguer une droite, ce qui confirme l'intuition d'une convergence en $\mathcal{O}(\log(\varepsilon))$.

Chapitre III

Résolution numérique de l'équation de la chaleur

1 Adaptation du WOS à l'équation de la chaleur : le WOMS

Ici, on va adapter la méthode précédente en suivant l'article [2] pour résoudre numériquement l'équation de la chaleur.

Le problème de la chaleur consiste à trouver une fonction $u : \mathbb{R}^+ \times \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$(EC) \begin{cases} u \in \mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times D) \\ \partial_t u(t, x) = \Delta_x u(t, x), \forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times D \\ u(t, x) = f(t, x), \forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \partial D \\ u(0, x) = f_0(x), \forall x \in D \end{cases},$$

où f et f_0 sont des fonctions continues données telles que $f(0, x) = f_0(x)$ sur ∂D .

On dira que u est solution de l'équation de la chaleur si

$$\partial_t u(t, x) = \Delta_x u(t, x), \forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times D.$$

La grande différence avec le travail précédent est la condition initiale f_0 . Pour la prendre en compte, on va continuer à faire évoluer un processus aléatoire discret sur des demi-sphères (sphère en espace, demi sphère en temps), mais on va ajouter une condition d'arrêt en temps.

Théorème.

Soit u une solution de l'équation de la chaleur, alors u vérifie la propriété de la moyenne suivante :

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi^{d/2}} \int_{(s,y) \in]0,1[\times \mathbb{S}^d} \frac{1}{s} u(t - \alpha s, x + 2\sqrt{\alpha} \psi_d(s)y) \psi_d^d(s) d\sigma(y) ds,$$

pour tout $\alpha > 0$ tel que $[t - \alpha, t] \times \overline{B(x, \sqrt{2\alpha d/e})} \subset \mathbb{R}^+ \times D$,
et où pour $t \in]0, 1[$,

$$\psi_d(t) = \sqrt{t \log(t^{-d/2})}.$$

La preuve de ce résultat étant complexe, on admet ce théorème.

Remarque : Si $d > 4$, toute fonction bornée vérifiant la propriété de la moyenne est solution de l'équation de la chaleur.

On se donne $(U_n)_n$ une suite de variables aléatoires uniformes sur $[0, 1]^{[d/2]+1}$ dont on note Π_n^U le produit des coordonnées, $(G_n)_n$ une suite de v.a. de loi normale centré réduite, et $(V_n)_n$ une suite de variables aléatoires uniformes sur la sphère unité. On demande qu'elles soient indépendantes. La filtration \mathcal{F}_n est celle engendrée par ces trois suites. On note

$$R_n = (\Pi_n^U)^{2/d} \exp \left(- \left(1 - \frac{2}{d} \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor \right) G_n^2 \right).$$

On définit pour $(u, v) \in \mathbb{R}^+ \times \bar{D}$,

$$\alpha(u, v) = \min \left(u, \frac{e}{2d} d(v, \partial D)^2 \right).$$

Enfin on définit la suite (T_n, X_n) par

$$\begin{cases} (T_0, X_0) = (t, x) \\ T_{n+1} = T_n - \alpha(T_n, X_n) R_{n+1} \\ X_{n+1} = X_n + 2\sqrt{\alpha(T_n, X_n)} \psi_d(R_{n+1}) V_{n+1} \end{cases}$$

De même que dans la première partie, on montre les résultats suivants.

Proposition.

- Si $g \in \mathcal{C}^{1,2}([0, t] \times D)$ vérifie la propriété de la moyenne, alors $(g(T_n, X_n))_n$ est une martingale bornée.
- (T_n, X_n) converge presque sûrement vers $(T_\infty, X_\infty) \in \{0\} \times \bar{D} \cup]0, t[\times \partial D$.
- Si u est solution du problème de la chaleur sur $[0, T]$ et si de plus u est continue sur $[0, T] \times \bar{D}$, alors u est donnée sur $[0, T] \times \bar{D}$ par

$$u(t, x) = \mathbb{E}_{(t,x)}[f(T_\infty, X_\infty) \mathbb{1}_{\{X_\infty \in \partial D\}}] + \mathbb{E}_{(t,x)}[f_0(X_\infty) \mathbb{1}_{\{X_\infty \notin \partial D\}}].$$

Les preuves sont quasiment identiques. Seule la condition en temps est rajoutée.

On déduit de tout ce travail l'algorithme voulu : on le nomme le WOMS pour *Walking On Moving Spheres*.

Soit ε la précision de l'algorithme.

On calcule la suite (T_n, X_n) comme définie précédemment en utilisant des suites U_n, G_n, V_n générées par l'ordinateur.

Le critère d'arrêt est le suivant :

Si $\alpha(T_n, X_n) \leq \varepsilon$, alors

1. Si $d(X_n, \partial D) \leq \frac{2\varepsilon d}{e}$, alors on pose X^ε une projection de X_n sur le bord et $T^\varepsilon = T_n$.
2. Si $d(X_n, \partial D) > \frac{2\varepsilon d}{e}$, alors on pose $T^\varepsilon = 0$ et $X^\varepsilon = X_n$.

La première condition veut dire que l'on a touché le bord avant de revenir au temps 0, la seconde modélise le contraire.

Enfin, on approxime la solution du problème de la chaleur par

$$u^\varepsilon(t, x) = \mathbb{E}_{(t,x)}[f(T^\varepsilon, X^\varepsilon) \mathbb{1}_{\{X^\varepsilon \in \partial D\}}] + \mathbb{E}_{(t,x)}[f_0(X^\varepsilon) \mathbb{1}_{\{X^\varepsilon \notin \partial D\}}].$$

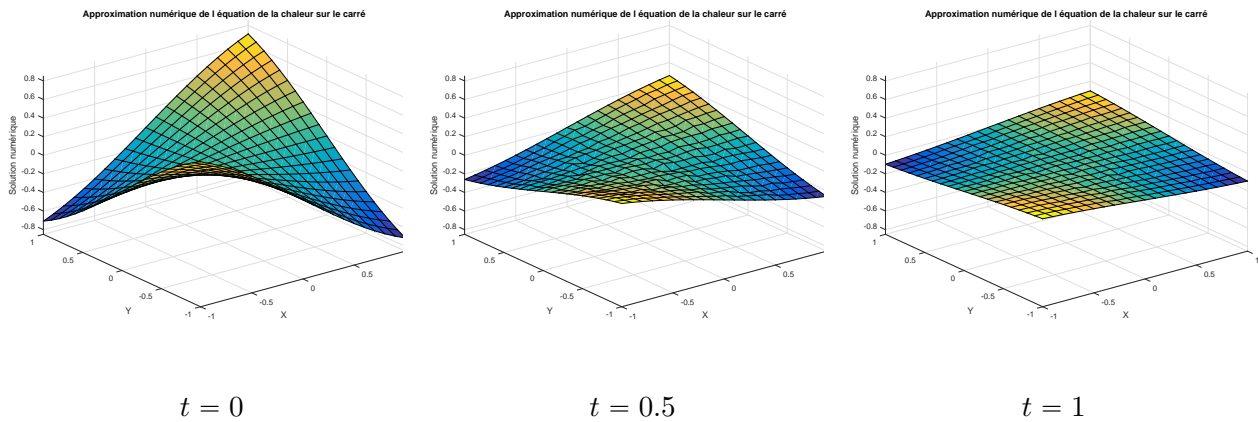
2 Quelques résultats numériques

On va ici encore se placer sur la carré centré en 0 en dimension 2. On veut approcher la solution de l'équation de la chaleur

$$u(t, x) = e^{-2t} \sin(x) \sin(y).$$

On choisit f et f_0 en conséquence.

Les simulations fonctionnent très bien. Ci-dessous, on peut voir l'approximation numérique en différents temps pour $\varepsilon = 0.001$ et un nombre de trajectoires lancées égale à 500 par point de maillage en temps et espace.



De même que précédemment, on peut montrer que l'algorithme WOMS termine en moyenne en $\mathcal{O}(\log(\varepsilon))$ itérations (voir [2]). Mais il est difficile d'obtenir une courbe de convergence : d'une part, l'erreur Monte-Carlo est trop grande quand ε est petit, d'autre part, ε est nécessairement choisi petit car (sur le carré) on a la condition

$$\left(\frac{1}{N_{\text{maillage}}} \right)^2 > \frac{2\varepsilon d}{e}$$

afin que les points de maillage du bord ne soient pas laissés constants.

Conclusion

Grâce aux propriétés de moyenne vérifiées par les solutions des équations de Laplace et de la chaleur, on a réussi à construire des objets probabilistes approchant la solution des EDP étudiées. On a déduit de ces constructions particulières, deux méthodes numériques simples résolvant nos EDP. Même si il existe des algorithmes plus efficaces comme les éléments finis, ceux construits ici ont un intérêt dans leur simplicité et leur implémentation simple en grande dimension.

Plusieurs questions se posent à présent :

D'abord, nous avons vu qu'une formule de la moyenne bien formulée amenait quasiment automatiquement un algorithme de type WOS nous aidant à résoudre l'EDP. Nous pouvons nous demander s'il existe d'autres EDP vérifiant des formules de moyenne.

Ensuite, comme les perturbations de systèmes elliptiques ont tendance à rester sympathiques, on peut essayer de perturber notre algorithme WOS pour qu'il résolve des EDP elliptiques plus complexes que le problème de Dirichlet.

Enfin, l'algorithme est censé converger peu importe la géométrie de l'ouvert considéré. Néanmoins nous avons vu des conditions géométriques apparaître sur le choix de ε rien que sur un carré. Il faudrait tester la convergence de l'algorithme sur des domaines peu réguliers et essayer d'en extraire différentes conditions concrètes améliorant la convergence (des bornes sur ε , conditions sur le maillage,...)

Pour finir, je tiens à utiliser les dernières lignes de ce rapport pour remercier Mihai Gradinaru pour ses conseils et pour m'avoir confié ce sujet passionnant, ainsi que Madalina Deaconu et Samuel Herrmann pour leurs réponses à mes questions.

Bibliographie

- [1] I. Binder and M. Braverman. The rate of convergence of the walk on spheres algorithm. *Geom. Funct. Anal.*, 22(3) :558–587, 2012.
- [2] M. Deaconu and S. Herrmann. Initial-boundary value problem for the heat equation - a stochastic algorithm. *submitted*, 2016.
- [3] E. DiBenedetto. *Real analysis*. Birkhäuser Advanced Texts : Basler Lehrbücher. [Birkhäuser Advanced Texts : Basel Textbooks]. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2002.
- [4] R. Durrett. *Probability : theory and examples*. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, fourth edition, 2010.
- [5] I. Karatzas and S. E. Shreve. *Brownian motion and stochastic calculus*, volume 113 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1991.
- [6] M. E. Muller. Some continuous Monte Carlo methods for the Dirichlet problem. *Ann. Math. Statist.*, 27 :569–589, 1956.
- [7] J. Villa-Morales. On the Dirichlet problem. *Expo. Math.*, 30(4) :406–411, 2012.

Appendices

Annexe A

Programmes pour le problème de Dirichlet

Algorithme WOS

```
function Xn=Walk_on_spheres(X0,r,eps,dist,d)
% Algorithme WOS à pas r constant
% Author : Adrien Laurent
%
% Input :
% X0 point de départ
% r pas de saut de l'algorithme
% eps paramètre d'arrêt de l'algorithme : distance au bord voulue
% dist la fonction donnant la distance d'un point au bord
% d dimension de l'espace
%
Xn=X0;
while feval(dist,Xn)>eps
    Gamma=normrnd(0,1,d,1);
    U=Gamma/norm(Gamma,2);
    Xn=Xn+r*feval(dist,Xn)*U;
end
```

Résolution numérique du problème de Dirichlet sur un carré

```
function sol=Solve_Dirichlet_Problem_carre(f,r,eps,Nmaillage,Nesperance)
% Résolution numérique de DP sur le carré sur un maillage en grille.
% Author : Adrien Laurent
%
% Input :
% f fonction de bord
% r pas de saut de l'algorithme WOS
% eps paramètre d'arrêt de l'algorithme WOS : distance au bord voulue
% Nmaillage paramètre de précision du maillage
% Nesperance nombre de trajectoires calculées pour trouver l'espérance
%
h=1/Nmaillage;
for i=1:2*Nmaillage+1
    for j=1:2*Nmaillage+1
        X0=[-1+(i-1)*h;-1+(j-1)*h];
        S=0;
```

```
for k=1:Nesperance
    X=Walk_on_spheres(X0,r,eps,'dist_hypercube',2);
    S=S+feval(f,proj_carre(X));
end
sol(i,j)=1/Nesperance*S;
end
end
```

Annexe B

Programmes pour l'équation de la chaleur

Algorithme WOMS

```
function [Tn,Xn]=Walk_on_moving_spheres(t,x,eps,dist,d)
% Algorithme WOMS (Deaconu-Herrmann)
% Author : Adrien Laurent
%
% Input :
% t temps de départ
% x point de départ
% r pas de saut de l'algorithme
% eps paramètre d'arrêt de l'algorithme : distance au bord voulue
% dist la fonction donnant la distance d'un point au bord
% d dimension de l'espace
%
Tn=t;
Xn=x;
alpha=min(Tn,exp(1)/(2*d)*feval(dist,Xn)^2);
while alpha>eps
    U=unifrnd(0,1,floor(d/2)+1,1);
    Pi_U=prod(U);
    G=normrnd(0,1);
    Gamma=normrnd(0,1,d,1);
    V=Gamma/norm(Gamma,2);
    R=Pi_U^(2/d)*exp(-(1-2/d*floor(d/2))*G^2);

    Tn=Tn-alpha*R;
    Xn=Xn+2*sqrt(alpha)*sqrt(R*log(R^(-d/2)))*V;

    alpha=min(Tn,exp(1)/(2*d)*feval(dist,Xn)^2);
end
```

Résolution numérique de l'équation de la chaleur sur un carré

```
function sol=Solve_Heat_equation_carre
(f,f0,T,eps,Nmaillage_espace,Nmaillage_temps,Nesperance)
% Résolution numérique de l'équation de la chaleur sur le carré sur un
maillage en grille.
% Author : Adrien Laurent
```

```

%
% Input :
% f fonction de bord
% f0 condition initiale
% T temps observé
% eps paramètre d'arrêt de l'algorithme WOMS
% Nmaillage_espace paramètre de précision du maillage en espace
% Nmaillage_temps paramètre de précision du maillage en temps
% Nesperance nombre de trajectoires calculées pour trouver l'espérance
%
tau=T/Nmaillage_temps;
h=1/Nmaillage_espace;
for n=1:Nmaillage_temps+1
    for i=1:2*Nmaillage_espace+1
        for j=1:2*Nmaillage_espace+1
            X0=[-1+(i-1)*h;-1+(j-1)*h];
            T0=(n-1)*tau;
            S=0;
            for k=1:Nesperance
                [T,X]=Walk_on_moving_spheres(T0,X0,eps,'dist_hypercube',2);
                if exp(1)/(2*2)*dist_hypercube(X)^2<=eps
                    X=proj_carre(X);
                    S=S+feval(f,T,X);
                else
                    S=S+feval(f0,X);
                end
            end
            sol(i,j,n)=1/Nesperance*S;
        end
    end
end
end
end

```