Intégration numérique géométrique et raide des ED — Mardi 22 octobre 2019
Enseignant : G. Vilmart    Assistant : A. Laurent — Université de Genève

---

# Devoir personnel
à rendre au plus tard le 10 décembre 2019 (à 9h15)

*Ce devoir noté est facultatif: il ne peut qu'améliorer la note finale du cours donnée par*

$$Note\ finale = \max\left(Oral, \frac{2\,Oral + Devoir}{3}\right).$$

*Il est demandé de rédiger un rapport détaillant le travail accompli et les résultats obtenus. De plus, les codes réalisés et les graphiques obtenus doivent être sauvegardés et déposés dans l'espace désigné sur le serveur Moodle, au plus tard le 10 décembre à 9h15.*
*Le logiciel conseillé est Matlab. Toutefois un autre logiciel/langage de programmation (Scilab, Oracle, Fortran, C, ...) est possible, sous réserve de validation préalable par l'enseignant.*

## Le pendule double : discrétisation et préservation de l'énergie

Le mouvement d'un pendule simple sous l'action de la gravité est donné par le système hamiltonien, d'énergie

$$H(p,q) = \frac{1}{2ml^2}p^2 - mgl\cos(q),$$

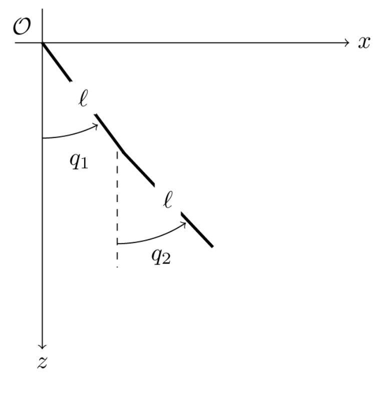
où $q$ est l'angle formée entre le pendule et la verticale descendante, et $p$ est la quantité de mouvement. Le pendule double satisfait quant à lui un système hamiltonien dans $\mathbb{R}^4$ d'hamiltonien $H(p,q) = T(p,q) + U(q)$ avec l'énergie cinétique $T$

$$T(p,q) = \frac{1}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 \sin^2(q_1 - q_2)}\left(\frac{1}{2}p_1^2 + \frac{(m_1+m_2)l_1^2}{2m_2 l_2^2}p_2^2 - \frac{l_1}{l_2}p_1 p_2 \cos(q_1 - q_2)\right),$$

et l'énergie potentielle de gravitation $U$

$$U(q) = -g(m_1+m_2)l_1\cos(q_1) - gm_2 l_2 \cos(q_2).$$

Le but de ce devoir est de simuler le mouvement du pendule mathématique double à l'aide des différentes méthodes numériques vues en cours, et d'observer les performances de chaque méthode du point de vue de la difficulté de l'implémentation, de la précision numérique et de la conservation de l'énergie. On pourra d'abord implémenter les méthodes dans le cas du pendule simple pour corriger d'éventuelles erreurs plus facilement.



**Question 1. Système hamiltonien** Pour les pendules simple et double, écrire le système hamiltonien associé à l'énergie $H$.

**Question 2. Discrétisation numérique** Implémenter en Matlab les méthodes numériques suivantes pour le pendule double :

**1.** la méthode d'Euler explicite,

$$q_{n+1} = q_n + h\nabla_p H(p_n, q_n) \qquad p_{n+1} = p_n - h\nabla_q H(p_n, q_n),$$

**2.** la méthode d'Euler symplectique,

$$p_{n+1} = p_n - h\nabla_q H(p_{n+1}, q_n) \qquad q_{n+1} = q_n + h\nabla_p H(p_{n+1}, q_n),$$

**3.** la méthode de Störmer-Verlet,

$$\begin{aligned} p_{n+1/2} &= p_n - \frac{h}{2}\nabla_q H(p_{n+1/2}, q_n) \\ q_{n+1} &= q_n + \frac{h}{2}\Big(\nabla_p H(p_{n+1/2}, q_n) + \nabla_p H(p_{n+1/2}, q_{n+1})\Big) \\ p_{n+1} &= p_{n+1/2} - \frac{h}{2}\nabla_q H(p_{n+1/2}, q_{n+1}), \end{aligned}$$

**4.** la méthode d'Euler implicite,

$$q_{n+1} = q_n + h\nabla_p H(p_{n+1}, q_{n+1}) \qquad p_{n+1} = p_n - h\nabla_q H(p_{n+1}, q_{n+1}),$$

**5.** la méthode du point milieu implicite

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= q_n + h\nabla_p H\left(\frac{p_n + p_{n+1}}{2}, \frac{q_n + q_{n+1}}{2}\right) \\ p_{n+1} &= p_n - h\nabla_q H\left(\frac{p_n + p_{n+1}}{2}, \frac{q_n + q_{n+1}}{2}\right). \end{aligned}$$

On prendra les données initiales suivantes

$$q_1(0) = \frac{\pi}{2}, \quad q_2(0) = 0, \quad p_1(0) = 0, \quad p_2(0) = 0,$$

et les constantes

$$l_1 = l_2 = 0.43m, \quad m_1 = m_2 = 0.340kg, \quad g = 9.81m.s^{-2}.$$

Pour chaque méthode, intégrer le système sur un temps $t = 60s$ avec le pas de temps $h = 10^{-3}$ et représenter graphiquement les trajectoires obtenues. Pour cela, il faut tracer la position de chaque masse obtenue à chaque itération. Afin de ne pas avoir à inverser l'axe des ordonnées, on pourra dessiner l'évolution des deux points suivants en utilisant la commande `comet` de *Matlab*

$$X_1 = l_1 \begin{pmatrix} \sin(q_1) \\ -\cos(q_1) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_2 = X_1 + l_2 \begin{pmatrix} \sin(q_2) \\ -\cos(q_2) \end{pmatrix}.$$

**Remarque :** Pour les méthodes ci-dessus qui sont implicites, on pourra utiliser une itération de point fixe sans calculer ni inverser de matrice jacobienne : $Y_{k+1} = F(Y_k)$ avec $Y_0 = y_n$ et $Y_k \to y_{n+1}$ pour $k \to \infty$ (en notant $y = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$, et en choisissant judicieusement la fonction $F$). A-t-on vraiment besoin d'appliquer une itération de point fixe pour la méthode d'Euler symplectique ?

**Question 3. Conservation de l'énergie** Pour chaque méthode, vérifier si l'énergie $H(p_n, q_n)$ est conservée au cours du temps, en représentant graphiquement $H(p_n, q_n)$ comme une fonction du temps $t = nh$. En essayant différents pas de temps $h$, trouver numériquement pour chaque méthode quel est le comportement correspondant, avec $t = nh$ :

$$H(p_n, q_n) - H(p_0, q_0) = \mathcal{O}(ht), \quad \mathcal{O}(h^2 t), \quad \mathcal{O}(h) \quad \text{ou} \quad \mathcal{O}(h^2).$$

**Question 4. Biais linéaire dans l'énergie** On considère un système hamiltonien

$$\dot{q} = \nabla_p H(p, q), \qquad \dot{p} = -\nabla_q H(p, q).$$

Montrer que pour une méthode numérique d'ordre $p$ intégrée sur $n = 1, ...N$ pas de longueur $h$, on a pour $t = nh$,

$$H(y_n) - H(y_0) = \mathcal{O}(th^p).$$

**Question 5. Erreur globale** On souhaite étudier le comportement de l'erreur globale, c'est-à-dire de

$$\|q_n - q(nh)\| \text{ et } \|p_n - p(nh)\| \text{ pour } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Appliquer les différentes méthodes avec différents pas $h \in \{2^{-k}, k = 4, 5, 6, \ldots, r\}$ et différents temps $t = Nh$. Pour la solution exacte $(q(nh), p(nh))$, on pourra l'approximer avec une méthode de Störmer-Verlet avec un pas $10 \cdot 2^r$. Trouver numériquement le comportement de $\|q_N - q(t)\|$ et $\|p_N - p(t)\|$, pour chaque méthode, parmi les possibilités suivantes:

$$\mathcal{O}(ht^2), \quad \mathcal{O}(h^2 t^2), \quad \mathcal{O}(ht) \quad \text{ou} \quad \mathcal{O}(h^2 t).$$

Rassembler vos résultats aux questions 3 et 5 dans le tableau suivant :

| méthode | erreur dans $H$ | erreur globale |
|---|---|---|
| Euler explicite | | |
| Euler symplectique | | |
| Störmer-Verlet | | |
| Euler implicite | | |
| Point milieu | | |

---

Informations générales, séries, voir `https://moodle.unige.ch/course/view.php?id=5641`