

# Simulation de processus stochastiques

April 5, 2024

Le TP se compose de 3 séances. Le TP doit être rendu individuellement sous la forme d'un jupyter notebook par mail à l'adresse `Adrien.Laurent@inria.fr` avant le 26 avril. Il sera noté sur 4 et sera utilisé comme bonus pour la note totale du cours.

## 1 Variables aléatoires et Méthode de Monte-Carlo

**Rappels:** On utilise la librairie `numpy` pour les fonctions mathématiques et les générateurs de nombres aléatoires. La librairie `numpy` dispose du module `random` qui contient le nécessaire pour générer des nombres aléatoires. En particulier la fonction `rand` de ce module génère un nombre uniformément au hasard sur  $[0, 1]$ . On pourra commencer avec l'en-tête suivante

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from numpy.random import rand
```

**Exercice 1:** Soit  $U$  une variable aléatoire de loi uniforme sur  $[0, 1]$ . Soient  $x_1, \dots, x_N$  des réels. En utilisant  $U$ , trouvez une méthode pour simuler une variable aléatoire discrète  $X$  telle que  $\mathbb{P}(X = x_n) = p_n$ , où  $p_1 + \dots + p_N = 1$ . Simulez en particulier un jet de pile ou face biaisé/une loi de Bernoulli (c'est à dire une variable aléatoire  $X \sim b(p)$  avec  $p_1 = p$  et  $p_2 = 1 - p$ ,  $x_1 = 1$  et  $x_2 = 0$ ). Simulez ensuite une loi uniforme sur  $\{1, \dots, N\}$ .

**Exercice 2:** On se propose d'approximer la valeur de  $\pi$  avec une méthode de Monte-Carlo. Pour ceci, on note  $D$  le disque unité, on génère  $M$  points  $X^{(m)}$  au hasard dans le carré  $[-1, 1]^2$ , puis on définit

$$Y^{(m)} = \mathbb{1}_{X^{(m)} \in D}.$$

L'estimateur de Monte-Carlo est  $\bar{Y}_M = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M Y^{(m)}$ .

Vérifiez numériquement que  $\bar{Y}_M$  est une approximation de  $\pi/4$ . Prouvez-le, et donner la vitesse de convergence à l'aide du théorème central limite.

**Théorème.** Soit  $(X^{(m)})_m$  une suite de variables aléatoires réelles définies sur le même espace de probabilité, indépendantes et identiquement distribuées suivant la même loi. Supposons que l'espérance  $\mu$  et la variance  $\sigma^2$  des  $X^{(m)}$  existent et soient finis avec  $\sigma^2 \neq 0$ . Soit  $\bar{X}_M = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M X^{(m)}$ , alors  $\sqrt{M} \frac{\bar{X}_M - \mu}{\sigma}$  converge en loi vers une loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

**Exercice BONUS:** On rappelle qu'une variable aléatoire suit une loi binomiale  $\mathcal{B}(N, p)$  si  $\mathbb{P}(X = n) = \binom{N}{n} p^n (1 - p)^{N-n}$ . De plus, si  $Y_1, \dots, Y_N \sim b(p)$  sont des piles ou face

indépendants, alors  $X = Y_1 + \dots + Y_N \sim \mathcal{B}(N, p)$ .

Quelles sont la moyenne et la variance de  $X$ ? On note  $\bar{X}_M = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M X^{(m)}$ , où les  $X^{(m)}$  sont des réalisations indépendantes de  $X$ .

Calculez  $\bar{X}_M$  avec  $M = 10000$ ,  $p = 1/2$  et  $N = 10$ . Quelle quantité  $\bar{X}_M$  approxime-t-il ? Tracer sur un histogramme la quantité suivante pour un grand nombre de trajectoires,  $p = 1/2$  et différentes valeurs de  $N$ :

$$Z_N = \frac{X - Np}{\sqrt{Np(1-p)}}.$$

En déduire vers quelle loi  $Z_N$  converge quand  $N$  tend vers l'infini. Est-ce surprenant ?

### Références:

- Ouvrard, Probabilités 1 et 2
- Dupont, Probabilités et statistiques pour l'enseignement
- Bercu, Chafaï, Modélisation stochastique et simulation

## 2 Mouvement Brownien et intégrales stochastiques

**Exercice 1:** On rappelle la définition d'un mouvement brownien dans  $\mathbb{R}$ .

**Définition.** Un mouvement brownien  $W(t)$  est un processus stochastique continu tel que

1.  $W(0) = 0$ ,
2. Pour  $0 \leq s < t$ ,  $W(t) - W(s) \sim \mathcal{N}(0, t - s)$ ,
3. Pour  $0 \leq s < t < u < v$ ,  $W(t) - W(s)$  et  $W(v) - W(u)$  sont indépendants.

Pour simuler un mouvement brownien sur  $[0, T]$ , on se donne un pas de temps  $h = T/N$ , puis on définit

$$W_0 = 0, \quad W_{n+1} = W_n + \sqrt{h}\xi_n, \quad \xi_n \sim \mathcal{N}(0, 1) \text{ indépendants.}$$

Implémentez une fonction avec paramètres  $T, N$ , qui renvoie un vecteur ligne contenant les  $W_n$ . Adaptez le code pour simuler un mouvement brownien  $d$ -dimensionnel (vecteur gaussien constitué de  $d$  browniens indépendants).

Tracez un grand nombre de trajectoires de  $W$ , ainsi que les fonctions  $t \mapsto \pm\sqrt{t}$ . Qu'observez-vous ?

**Exercice 2:** Soit  $f: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction (potentiellement aléatoire). On définit l'intégrale stochastique comme la quantité

$$\int_0^T f(t) dW(t) := \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N-1} f(t_n)(W(t_{n+1}) - W(t_n)),$$

où  $h = T/N$ ,  $t_n = nh$ , et où la convergence est en probabilité, sous certaines hypothèses de régularité sur  $f$ . Écrivez une fonction `Ito(f,W,T,N)` qui calcule une approximation de l'intégrale stochastique de  $f$  contre  $W$ , où  $W$  est un mouvement Brownien simulé aux temps  $t_n$ .

Une alternative est la définition suivante

$$\int_0^T f(t) \circ dW(t) := \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N-1} f\left(\frac{t_n + t_{n+1}}{2}\right)(W(t_{n+1}) - W(t_n)).$$

Écrivez une fonction `Strato(f,W,T,N)` qui calcule cette nouvelle intégrale.

Vérifiez que les deux valeurs coïncident approximativement pour  $f(t) = t$ . Est-ce toujours le cas pour  $f(t) = W(t)$  ?

*Bonus :* trouvez la valeur exacte des deux intégrales quand  $f = W$  et vérifiez ce résultat numériquement.

### Références:

- Evans, An introduction to stochastic differential equations
- Higham, An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations

### 3 Approximation des équations différentielles stochastiques

On rappelle que l'équation différentielle stochastique suivante en dimension  $d$ ,

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t)$$

est définie par la formulation intégrale

$$X(t) = X_0 + \int_0^t f(s, X(s))ds + \int_0^t \sigma(s, X(s))dW(s),$$

où on utilise l'intégrale d'Itô. On se propose dans ce TP d'approximer une telle équation selon différents points de vue. On s'intéressera à deux sous-cas en particulier: le modèle de Black-Scholes pour l'étude simplifiée de marchés financiers (1D)

$$dX = \mu X dt + \sigma X dW, \quad (3.1)$$

et le modèle de Langevin (sur-amorti) pour la simulation de systèmes de particules soumis à un potentiel  $V: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$dX = -\nabla V(X)dt + \sigma dW, \quad (3.2)$$

où  $W$  est  $d$  dimensionnel et  $\sigma > 0$ . La méthode la plus couramment utilisée pour la simulation de dynamiques stochastiques est la méthode de Euler-Maruyama

$$X_{n+1} = X_n + f(t_n, X_n)(t_{n+1} - t_n) + \sigma(t_n, X_n)(W(t_{n+1}) - W(t_n)).$$

**Exercice 1:** Vérifiez théoriquement et numériquement que

$$X(t) = \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)\right)X_0$$

est la solution de (3.1) pour différents  $\mu$  et  $\sigma$ . On pourra comparer les trajectoires exacte et de Euler-Maruyama sur un même graphique.

Faites ensuite une courbe d'erreur forte: calculez l'approximation de Monte-Carlo de l'erreur forte  $L^2$

$$\mathbb{E}[(X_N - X(T))^2]^{1/2},$$

pour  $T = 1$ ,  $M \sim 10000$  trajectoires et différents pas de temps  $h$ . Faites un plot de l'erreur contre  $h$ . Quel est l'ordre de convergence de la méthode de Euler-Maruyama ?

Comparer avec la méthode de Milstein

$$X_{n+1} = (1 + \mu h + \sigma(W(t_{n+1}) - W(t_n)) + \frac{\sigma^2}{2}((W(t_{n+1}) - W(t_n))^2 - h))X_n.$$

Quel est son ordre ?

**Exercice 2:** Le paradigme de l'erreur forte est le suivant : étant donné un mouvement Brownien  $W(t)$ , on veut approximer la trajectoire  $X(t)$ . Pour de nombreuses applications, on ne connaît pas  $W(t)$  et on s'intéresse plutôt à la loi de  $X(t)$ , et en particulier à sa moyenne, sa variance, etc... Plus précisément, on se donne une fonction test  $\phi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  (typiquement un polynôme), l'erreur faible est alors

$$|\mathbb{E}[\phi(X_N) - \phi(X(T))]|.$$

On va s'intéresser à l'équation de Langevin (3.2). La méthode d'Euler-Maruyama se réécrit plus simplement en faible comme

$$X_{n+1} = X_n - h\nabla V(X_n) + \sigma\sqrt{h}\xi_n, \quad \xi_n \sim \mathcal{N}(0, I_d).$$

On prend  $d = 2$  et  $V(x) = C(x_1^2 + x_2^2 - 1)^2$  où  $C$  est une constante fixée à 1 pour l'instant, et  $X_0 = (1, 0)$ . On prend  $\phi(x) = x_1^2 + 3x_2^2$ . Faites une approximation-Monte-Carlo de l'erreur faible, en prenant comme solution de référence la même méthode avec un pas 4 fois plus petit. Représentez l'erreur faible en fonction de  $h$ , et déduisez en l'ordre faible de la méthode d'Euler-Maruyama.

*Bonus* : Simulez des trajectoires avec différentes valeurs de  $C$  de plus en plus grandes pour  $T = 10$  (affichez tous les points de la trajectoire sur un plot 2D). Que se passe-t-il ? Changez la valeur de la condition initiale en  $X_0 = (-1, 0)$  et  $X_0 = (0, 1)$ . Cela change-t-il la forme de la trajectoire ? La valeur de  $\mathbb{E}[\phi(X_N)]$  ?

### Références:

- Higham, An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations
- Lelièvre, Rousset, Stoltz, Free energy computations
- Milstein, Tretyakov. Stochastic numerics for mathematical physics